Gymnázium Přírodní škola, o. p. s.

Geometrie zakřiveného prostoru – aplikace s fyzikální tématikou

Jan Pokorný

Petr Martiška, Vojtěch Žák

1. 11. 2012

Obsah

1 Úvod

Jako téma své práce jsem si vybral teoretickou práci z pomezí matematiky a fyziky, konkrétně eukleidovský a neeukleidovský prostor. Toto téma jsem si zvolil, protože mě matematika a fyzika zajímá a po zakončení studia na gymnáziu, bych se chtěl právě těmto dvěma oborům dále podrobněji věnovat. Pojal jsem tedy praktickou maturitu jako jakousi zkoušku, při které bych si mohl na středoškolské úrovni vyzkoušet, jak se vědecké práce píší a co alespoň v náznaku obnáší. Mým hlavním cílem tedy nebylo vymyslet něco úplně nového, nýbrž seznámit se s vědeckou prací tohoto typu.

Práce pojednává o eukleidovském a neeukleidovském prostoru. Nejprve seznámí čtenáře s eukleidovským prostorem a jeho základními vztahy a dále promluví stručně o prostoru neeukleidovském a naznačí, v čem se tyto dva obory liší. Dále jsou v práci uvedeny některé matematické problémy z pomezí eukleidovského a neeukleidovského prostoru a jejich řešení pomocí středoškolské matematiky. Problémy se zabývají převážně geometrií na povrchu koule, takzvanou sférickou geometrií. Úlohy jsou doplněné nákresy, které byly vytvořeny v programu GeoGebra a které pomáhají lepšímu pochopení zadání a následného řešení problémů. Problémy jsou vymyšleny tak, aby popisovaly situace, které jsou nám nějakým způsobem blízké a nejsou proto příliš abstraktní. Problémy se konkrétně vztahují k povrchu Země.

Hlavním cílem práce bylo seznámit se se základními myšlenkami a matematickým popisem eukleidovského a neeukleidovského prostoru. Na základě toho potom vybrat několik problému spojených s neeukleidovským prostorem, ty vyřešit pomocí aparátu pokročilé středoškolské matematiky a, dále k těmto problémům vytvořit texty doplněné ilustracemi, které mohou pomoci přiblížit látku středoškolákům.

2 Teoretické základy a použité metody

2.1 Eukleidovská geometrie

Eukleidovská geometrie obsahuje pouze geometrii rovinnou a geometrii prostorovou. Je založena na geometrických definicích a axiomech, které jsou uvedeny v Eukleidově publikaci *Základy*, která se skládá ze třinácti svazků. Eukleides v ní definuje základní geometrické prvky jako: přímka, bod, plocha, rovina a další. Po definicích jsou v díle uvedena tvrzení, která Eukleides rozděluje na axiomy a postuláty. Zde je uvedeno pět Eukleidových postulátů (podle [1]):

1. Je možné nakreslit přímou čáru z kteréhokoliv bodu do kteréhokoli jiného bodu.

2. Je možné prodloužit konečně přímou čáru na přímku.

3. Je možné nakreslit kruh s libovolným středem a poloměrem.

4. Všechny pravé úhly jsou si rovny.

5. Jestliže přímka protíná dvě přímky tak, že vnitřní úhly na téže straně jsou menší než dva pravé úhly, pak se tyto dvě přímky protnou na stejné straně, na níž leží dva zmíněné vnitřní úhly.

Pátý postulát je viditelně složitější než ostatní čtyři, a proto byla snaha ho zjednodušit. Následujících šest postulátů je logicky naprosto rovnocenných pátému postulátu (podle [1]):

5a. Je-li dána přímka a bod, který na ní neleží, pak jím lze vést právě jednu rovnoběžku s danou přímkou.

5b. Jestliže přímka protíná jednu ze dvou rovnoběžek, pak musí protínat i druhou rovnoběžku.

5c. Rovnoběžky jsou vždy stejně vzdáleny.

5d. Součet úhlů v trojúhelníku se vždy rovná dvěma pravým úhlům.

5e. Plocha trojúhelníku může být libovolně velká.

5f. Tři body leží buď na přímce, nebo na kružnici.

Eukleidovy postuláty ale nejsou úplné. Existují tvrzení o rovinné geometrii, která z pěti postulátů nelze dokázat, ani vyvrátit, např. že přímka procházející středem kružnice musí tuto kružnici protínat.

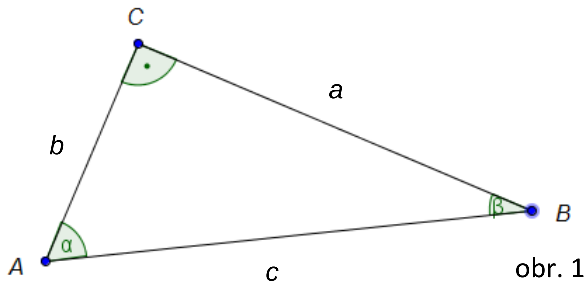
2.2 Neeukleidovská geometrie [1]

Matematikům vždy připadal zvláštní a jiný pátý postulát eukleidovské geometrie. Začali tedy přemýšlet, jestli nevychází z prvních čtyř postulátů, nebo s nimi není v rozporu. První, kdo zkusil vypustit pátý postulát, byl nejspíš Carl Friedrich Gauss [1]. Chtěl zjistit, co by se stalo, kdyby trojúhelníky směly mít jiný součet vnitřních úhlů než 180°. Zjistil, že by nedošlo k vnitřním rozporům v teorii, pouze by vznikla trochu odlišná geometrie než ta původní o pěti postulátech. Gauss ale tyto své objevy nepublikoval a tak nám jsou známy pouze z jeho korespondence s kolegy. Za první neeukleidovskou geometrii je tedy považována Lobačevského geometrie, který svou práci publikoval roku 1829[2]. Vyšlo mu také, že nenastane žádný rozpor s předchozí geometrií, ale vzniklá geometrie bude jaksi odlišná. George Friedrich Bernhard Riemann byl první, kdo poukázal na to, že pokud se poruší ekvivalent pátého postulátu označený jako 5a, nemusí vždy existovat nekonečně mnoho rovnoběžek, ale také nemusí být žádná. Tato myšlenka neporušuje druhý postulát, protože neomezeně prodlužovaná přímka nemusí být nekonečná, pokud se vše odehrává na kulové ploše. Stručně můžeme říct, že neeukleidovská geometrie je geometrie zakřiveného prostoru.

2.3 Použité matematické prostředky

Pythagorova věta

Popisuje vztah, který platí mezi velikostmi stran pravoúhlých trojúhelníků v eukleidovské rovině. Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu obsahů čtverců sestrojených nad jeho odvěsnami. Její matematický přepis je obecně známí jako $a^2 + b^2 = c^2$.



obr. 1

Goniometrické funkce

Sinus úhlu α je poměr velikosti protilehlé odvěsny vůči danému úhlu α a velikosti přepony.

Matematicky - $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ (viz obr. 1).

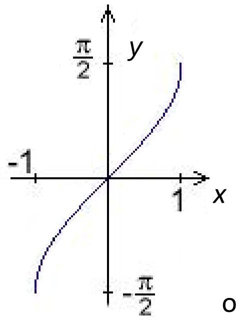
Kosinus úhlu α je poměr velikosti odvěsny přilehlé k danému úhlu α a velikosti přepony.

Matematicky - $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ (viz obr. 1).

Cyklometrické funkce

Arkussinus je inverzní funkce ke goniometrické funkci sinus, která se značí *arcsin*.

Pokud platí, že $\sin\alpha = x$,
znamená to, že $\alpha = \arcsin x$.



obr. 2

.

$D_f = \langle -1, 1 \rangle$

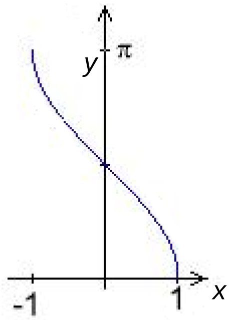
$H_f = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

Arkuskosinus je inverzní funkce ke goniometrické funkci kosinus, která se značí *arccos*.

Pokud platí, že $\cos\alpha = x$,

znamená to, že $\alpha = \arccos x$.

.



obr. 3

$D_f = \langle -1, 1 \rangle$

$H_f = \langle 0, \pi \rangle$ [3]

Další vztahy a označení

Obsah kulového vrchlíku: $S = 2\pi rv$ (kde *r* je poloměrem koule a *v* je výška vrchlíku)

Povrch koule: $S = 4\pi r^2$ (kde *r* je poloměrem koule)
Délka kružnice: $S = 2\pi r$ (kde *r* je poloměrem kružnice)

Symbolem (*ACB*) budeme v následujícím textu značit délku kružnicového oblouku *ACB* (viz obr. 4).

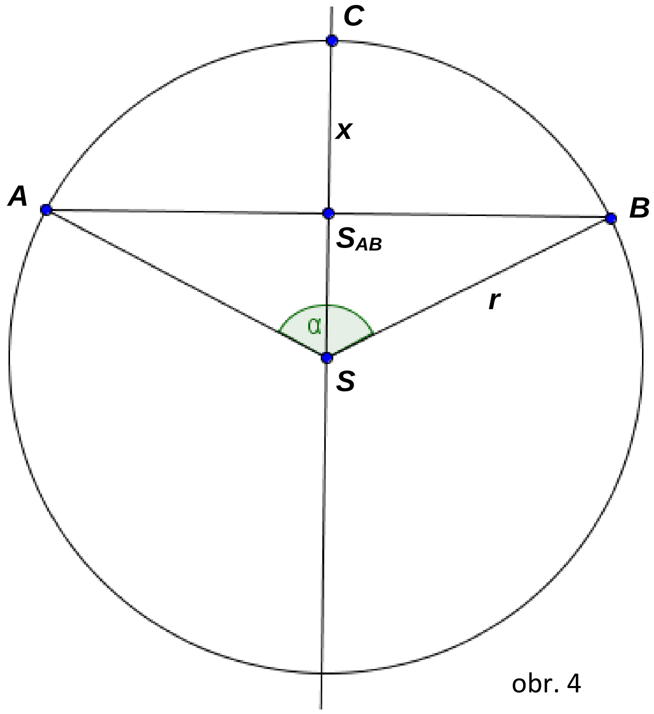
3 Řešené problémy

Spolu s odborným konzultantem Vojtěchem Žákem bylo formulováno osm problémů, které jsou spojeny s neeukleidovskou geometrií. Konkrétně se jedná o úlohy týkající se povrchu koule (ve speciálním případě idealizovaný povrch Země). Problémy byly vybrány tak, aby mohly být řešeny prostředky využívanými v eukleidovské geometrii na pokročilé středoškolské úrovni. V následující části textu je uvedeno jejich zadání a následné řešení.

3.1 Výpočet zakřivení kulové plochy

Zadání

Jsou dány dva různé body *A* a *B*, které leží na povrchu koule. Odvoďte, jak souvisí velikost úsečky CS_{AB}, kde bod *C* leží v rovině *ABS*, s délkou oblouku *ACB* (viz obr. 4)?



obr. 4

Řešení

Nejdříve použijeme vztah na výpočet délky oblouku *ACB* pomocí poloměru kružnice *r* a úhlu *α*. Známe-li poloměr *r*, můžeme spočítat délku kružnice pomocí vztahu *o* = 2π*r*. Následně délku kružnice vydělíme poměrem plného úhlu (360°) a středového úhlu *α* oblouku *ACB*

$$(ACB) = 2\pi r \frac{\alpha}{360°}.$$

Dále nahradíme úhel *α* výrazem, který obsahuje *x* (velikost úsečky CS_{AB}) a poloměr koule označený *r*.

Pro vyjádření úhlu *α* budeme potřebovat vztah z trojúhelníku BS_{AB}

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{r - x}{r}.$$

Abychom mohli vzorec dále upravit tak, aby na jedné straně rovnice vyšel samostatně úhel *α*, upravíme vzorec pomocí funkce arcuskosinus do podoby

$$\frac{\alpha}{2} = \arccos\left(\frac{r-x}{r}\right).$$

V posledním kroku rovnici vynásobíme dvěma a tím dostáváme vztah na výpočet hledaného úhlu

$$\alpha = 2\arccos\left(\frac{r-x}{r}\right).$$

Výrazem $2\arccos\left(\frac{r-x}{r}\right)$ nahradíme úhel *α* v prvním vztahu pro výpočet délky oblouku *ACB*

$$(ACB) = \frac{\frac{2\pi r}{360°}}{2\mathrm{arcos}\left(\frac{r-x}{r}\right)}$$

Lomený výraz si dále zjednodušíme

$$(ACB) = \frac{\frac{4\pi r}{360°}}{\mathrm{arcos}\left(\frac{r-x}{r}\right)}.$$

Potom rovnici vydělíme výrazem $\frac{4\pi r}{360°}$. Dostáváme

$$\frac{(ACB)360°}{4\pi r} = \mathrm{arcos}\left(\frac{r-x}{r}\right).$$

Pro vyjádření výrazu $\frac{r-x}{r}$ využijeme funkce kosinus. Máme

$$\cos\frac{(ACB)360°}{4\pi r} = \frac{r-x}{r}.$$

Následně rovnici vynásobíme *r* a obdržíme

$$r\cdot\cos\frac{(ACB)360°}{4\pi r} = r - x.$$

V posledním kroku k rovnici přičteme *x* a odečteme $r\cdot\cos\frac{(ACB)360°}{4\pi r}$:

$$r - r\cdot\cos\frac{(ACB)360°}{4\pi r} = x.$$

Rovnici ještě upravíme tím, že na levé straně rovnice vytkneme *r* a máme hledaný vztah

$$x = r\left(1 - \cos\left(\frac{(ACB)360°}{4\pi r}\right)\right).$$

3.2 Ověření vztahu pro zakřivení kulové plochy

Zadání

Ověřte vztah z úlohy 1 pro konkrétní hodnoty:

a) $(ACB) = \pi r$ (oblouk *ACB* je půlkružnice),

b) (*ACB*) = 0 (oblouk *ACB* má nulovou délku; jedná se o bod)

Řešení

a) Pokud je obloukem půlkružnice, mělo by *x* vyjít rovno *r*, protože úsečka *AB* prochází středem kružnice.

Máme

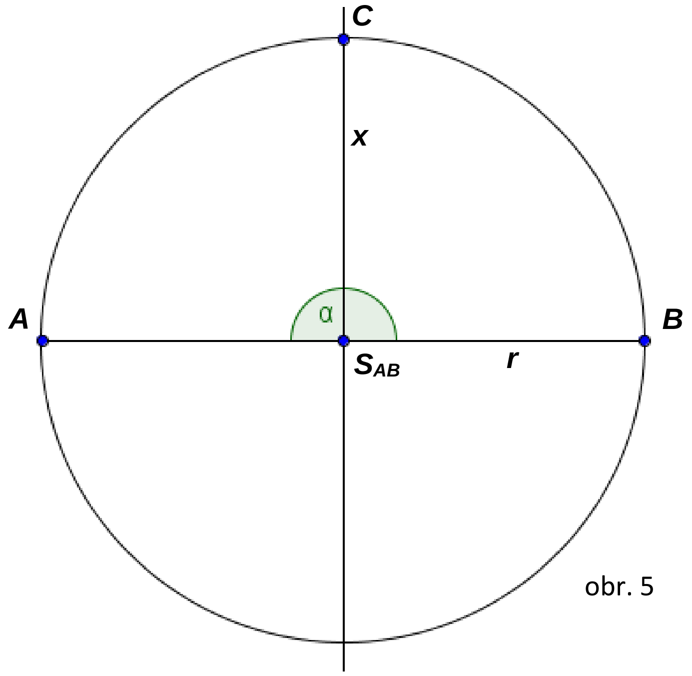
$$x = r\left(1 - \cos\left(\frac{\pi r 360°}{4\pi r}\right)\right).$$

Lomený výraz $\frac{\pi r 360°}{4\pi r}$ můžeme zkrátit na 90° a poté dostáváme

$$x = r(1 - \cos 90°).$$

Platí, že cos 90°=0, a vychází tedy, že

x = *r*



obr. 5

b) Předpokládáme, že pokud bude mít úsečka $AS_{AB}B$ nulovou velikost, bude její vzdálenost od bodu *C* nulová.

Máme

$$x = r\left(1 - \cos\left(\frac{0}{4\pi r}\right)\right)$$

Výraz $\frac{0}{4\pi r}$ =0, cos 0°=1 a vychází, že

x = 0.

Oba tyto případy tedy potvrzují správnost vztahu $x = r\left(1 - \cos\left(\frac{(ACB)360°}{4\pi r}\right)\right)$.

3.3 Zakřivení vodní hladiny na povrchu Země

Zadání

Jak velké je zakřivení vodní hladiny na českém rybníku Rožmberk?

Řešení

Vzdálenost břehů v nejširším místě rybníku Rožmberk je asi 3 750 m [4]. Tuto hodnotu si v předchozím odvozeném vzorci dosadíme za délku oblouku *ACB*. Hodnota *r* se bude rovnat poloměru Země, což je 6 378 000 m[5].

Do obecného vztahu

$$x = r\left(1 - \cos\left(\frac{(ACB)360°}{4\pi r}\right)\right)$$

dosadíme hodnoty pro poloměr Země a vzdálenost břehů rybníku Rožmberk

$$x = 6\,378\,000\left(1 - \cos\left(\frac{3\,750 \cdot 360°}{4\pi \cdot 6\,378\,000}\right)\right) \text{ m.}$$

Vyjde nám přibližná hodnota zakřivení

$$x \approx 0{,}28 \text{ m}$$

Zakřivení vodní hladiny rybníku Rožmberk je asi 28 cm, což se nám může zdát překvapivé, jelikož je to velikost, kterou můžeme vidět pouhým okem a rovná se přibližně delšímu rozměru papíru ve formátu A_4.

3.4 Skutečný tvar vodní hladiny

Zadání

Je zakřivení na vodní hladině opravdu vždy rovno veličině *x* z problému 1? Které faktory mají ještě na zakřivení vodní hladiny vliv?

Řešení

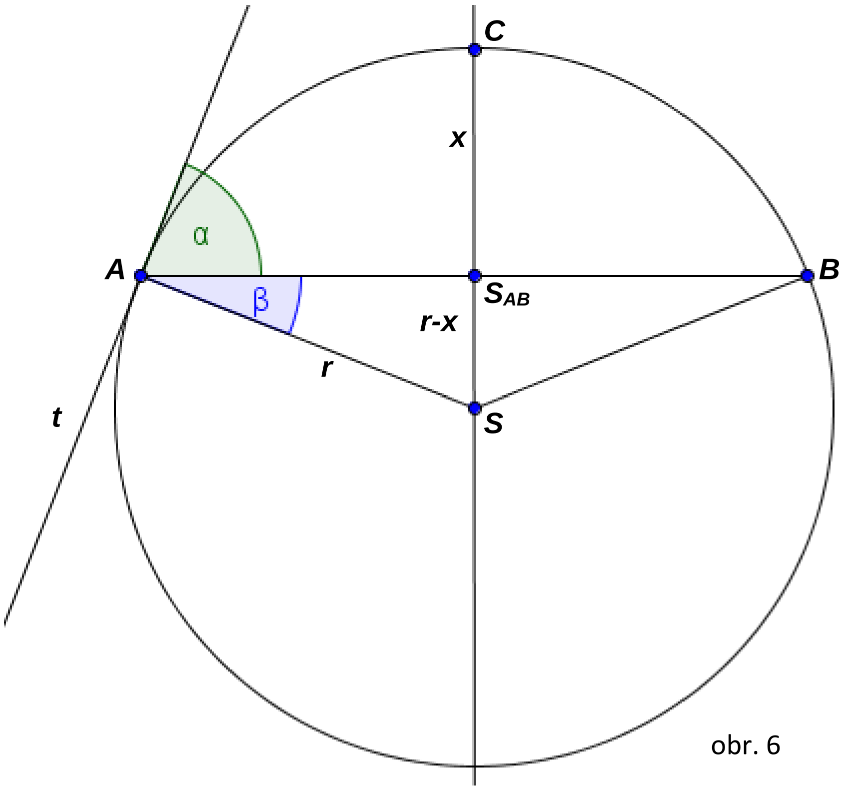
Zakřivení vodní hladiny se většinou nebude rovnat přímo *x*. Je to způsobeno tím, že na vodní hladinu působí další síly kromě gravitační síly Země. Jednou z těchto sil je gravitační síla Měsíce, která způsobuje na Zemi slapové jevy (příliv a odliv). Na hladině potom vznikají jinak zakřivená místa, takže vodní hladina nemá přesně tvar koule.

Dále mohou mít na vodní hladinu vliv mořské proudy, které způsobují, že v některých místech je nahrnuto více vody, než jinde.

3.5 Úhel nejkratší spojnice bodů *A* a *B*

Zadání

Jaký je vztah pro úhel, který svírá tečna t v daném bodě *A* s úsečkou *AB*, tj. zjistěte úhel, pod jakým bychom se museli vydat šikmo pod povrch Země, abychom se dostali nejkratší cestou do druhého bodu *B*?



obr. 6

Řešení

Vycházíme ze vztahu $\alpha = 90° - \beta$, protože tečna procházející bodem *A* bude vždy kolmá na úsečku *AS*, kde *S*, je středem koule. Úhel β zjistíme z trojúhelníku ASS_{AB}. K výpočtu dále využijeme vztah, který jsme odvodili dříve pro vzdálenost bodu *C* od bodu S_{AB}, tj.

$$x = r\left(1 - \cos\left(\frac{(ACB)360°}{4\pi r}\right)\right).$$

Trojúhelník ASS_{AB} je pravoúhlý, takže si vyjádříme úhel β pomocí sinu β jako

$$\sin\beta = \frac{r - x}{r}$$

Za *x* si dosadíme z výše zmiňovaného vzorce a dostáváme

$$\sin\beta = \frac{r - r\left(\cos\left(\frac{(ACB)360°}{4\pi r}\right)\right)}{r}.$$

Vztah si dále zjednodušíme na pravé straně, kde se dá zkrátit *r*. Máme

$$\sin\beta = 1 - \left(1 - \cos\left(\frac{(ACB)360°}{4\pi r}\right)\right).$$

Potom si osamostatníme β pomocí funkce arkussinus a dostáváme

$$\beta = \arcsin\left(\cos\left(\frac{(ACB)360°}{4\pi r}\right)\right).$$

Nakonec dosadíme výraz $\arcsin\left(\cos\left(\frac{(ACB)360°}{4\pi r}\right)\right)$ místo β do původní rovnice $\alpha = 90° - \beta$ a máme

$$\alpha = (90° - \arcsin\left(\cos\left(\frac{(ACB)360°}{4\pi r}\right)\right).$$

3.6 Ověření vztahu pro úhel nejkratší spojnice bodů *A* a *B*

Zadání

Ověřte vztah, který je řešením problému 5, pro konkrétní hodnoty

a) (*ACB)* = πr (obloukem *ACB* je půlkružnice)**,**

b) $(ACB) \to 0$ (délka oblouku AB se limitně blíží nule).

a) Pokud bude obloukem půlkružnice, měl by nám úhel *α* vyjít 90°. Spojnice bodů *AB* totiž bude úsečka procházející středem *S* (body *S* a S_{AB} splynou) a tečna na ní bude kolmá.

$$\alpha = (90° - \arcsin\left(\cos\left(\frac{\pi r 360°}{4\pi r}\right)\right)$$

$$\alpha = (90° - \arcsin(\cos 90°)$$

$$\alpha = 90° - \arcsin 0$$

$$\alpha = 90°$$

b) Pokud se bude délka oblouku *ACB* limitně blížit nule, tečna splyne se spojnicí bodů *AB*, tím pádem úhel mezi nimi bude nulový.

$$\alpha = \lim_{(ACB)\to 0} 0(90° - \arcsin(\cos 0)$$

$$\alpha = \lim_{(ACB)\to 0} 0(90° - 90)$$

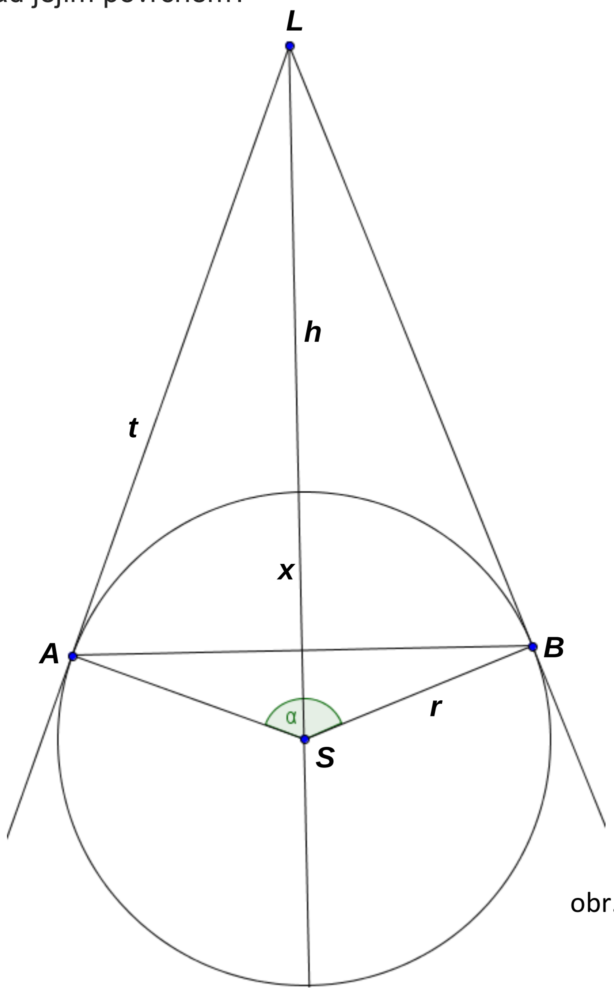
$$\alpha = 0$$

Oba tyto příklady potvrzují správnost vztahu $\alpha = (90° - \arcsin\left(\cos\left(\frac{(ACB)360°}{4\pi r}\right)\right)$.

3.7 Povrch Země viděný z vesmíru

Zadání

Kolik procent z dané kulové plochy (povrchu Země) je teoreticky vidět z letadla (nebo obecně z vesmíru) z výšky *h* nad jejím povrchem?



obr. 7

Řešení

Vycházíme ze vztahu pro výpočet obsahu kulového vrchlíku $2\pi rx$, kde *x* je výška vrchlíku. Procento povrchu Země, které bude vidět z výšky *h,* se rovná obsahu kulového vrchlíku, děleno povrchem koule, to celé vynásobené sto procenty

$$y = \frac{2\pi rx}{4\pi r^2} \cdot 100\%$$
.

Výraz si zjednodušíme na tvar

$$y = \frac{x}{2r} \cdot 100\%$$
.

V tomto vztahu následně nahradíme *x* výrazem odvozeným při řešení problému 1:

$$y = \frac{r\left(1 - \cos\left(\frac{(ACB)360°}{4\pi r}\right)\right)}{2r} \cdot 100\%.$$

Výraz zkrátíme na 2*r* a dostáváme

$$y = \left(1 - \cos\left(\frac{(ACB)360°}{4\pi r}\right)\right) \cdot 50\%.$$

V tomto vztahu se ale vyskytuje délka oblouku *ACB*, kterou neznáme. Nahradíme ji tedy tak, abychom na pravé straně dostali výšku *h*. Délku oblouku *ACB* si vyjádříme pomocí *h* přes úhel *α*.

Pomocí výrazu $(ACB) = 2\pi r \frac{\alpha}{360°}$ získáme délku oblouku *ACB*, protože poměrem vnitřního úhlu oblouku *ACB* a plného úhlu (360°), zjistíme, jakou část tvoří oblouk *ACB* z celku. Výsledek ale vyjde v stupních, takže ho ještě vynásobíme obvodem celku $2\pi r$ a tím dostaneme délku oblouku (*ACB*).

Máme

$$(ACB) = 2\pi r \frac{\alpha}{360°}.$$

Z této rovnice vyjádříme úhel *α* tím, že celou rovnici vydělíme výrazem $\frac{2\pi r}{360°}$. Dostáváme

$$\alpha = \frac{(ACB)360°}{2\pi r}.$$

Z trojúhelníku *SAL* vyjádříme kosinus *α*

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{h + r}.$$

Z rovnice vyjádříme úhel *α*. Vyjde

$$\alpha = 2\arccos\frac{r}{r + h} \quad .$$

Protože $\alpha = \frac{(ACB)360°}{2\pi r}$ a také $\alpha = 2\arccos\frac{r}{r + h}$, musí platit i vztah $\frac{(ACB)360°}{2\pi r} = 2\arccos\frac{r}{r + h}$

Z rovnice si následně osamostatníme délku oblouku *ACB* tím, že ji vydělíme výrazem

$\frac{360°}{2\pi r}$ a dostaneme

$$(ACB) = \frac{4\pi r \cdot \arccos\frac{r}{r+h}}{360°}.$$

Pravou stranu posledního vztahu dosadíme místo délky oblouku *ACB* do vztahu

$y = \left(1 - \cos\left(\frac{(ACB)360°}{4\pi r}\right)\right) \cdot 50\%$ a máme

$$y = \left(1 - \cos\left(\frac{\frac{4\pi r \cdot \arccos\frac{r}{r+h}}{360°} \cdot 360°}{4\pi r}\right)\right) \cdot 50\%.$$

Výraz si ještě zjednodušíme a získáme konečnou podobu

$$y = \frac{h}{r+h} \cdot 50\%$$

3.8 Ověření vztahu pro procento Země viděné z vesmíru

Zadání

Ověřte vztah, který je řešením problému 7, pro konkrétní hodnoty

a) Na Zemi se díváme z výšky rostoucí nade všechny meze

b) $h \to 0$ (na Zemi se díváme z nulové výšky)

c) h = 1,65 m (výška, ze které se na Zemi dívá průměrný člověk, který na ní stojí)

d) h = 8 km = 8 000 m (typická výška letu dopravních letadel [6])

e) h = 385 000 km = 385 000 000 m (střední vzdálenost Měsíce od Země[5])

a)

$$y = \lim_{h\to\infty}\left(\frac{h}{r+h}\cdot 50\%\right)$$

Pokud dosadíme dané hodnoty, za výšku *h* a poloměr *r*, výraz $\frac{h}{r+h}$ vyjde 1. Máme

$$y = 50\%$$

b)

$$y = \lim_{h\to 0}\left(\frac{h}{h+r}\cdot 50\%\right)$$

Víme, že pokud *h* = 0, bude celý výraz $\frac{h}{h+r}$ rovný nule. Dostáváme

$$y = 0\%.$$

c) Po dosazení hodnot do výrazu dostáváme

$$y = \frac{1{,}65}{6\,378\,000 + 1{,}65}\cdot 50\%$$

$$y \approx 10^{-5}\%.$$

d) Po dosazení hodnot do výrazu dostáváme

$$y = \frac{8000}{6\,378\,000 + 8000}\cdot 50\%$$

$$y = 0{,}063\%$$

e) Po dosazení hodnot do výrazu dostáváme

$$y = \frac{385\,000\,000}{6\,378\,000 + 385\,000\,000}\cdot 50\%$$

$$y \approx 49\%.$$

Hodnoty, které vyšly pro jednotlivé případy, se nám mohou zdát překvapivé. Může vypadat nemožné, že bychom mohli z nějaké výšky vidět celých 50 % Země. Znamenalo by to totiž, že tečny, které jsme si zvolili pro vyřešení problému, by musely být rovnoběžné, museli by vycházet ze stejného bodu a vzdálenost mezi nimi by byla nenulová. To se nám může zdát absurdní. Je to tím, že nekonečná vzdálenost je sama od sebe pro nás velmi těžko představitelná. Jak ale můžeme vidět, je tato představa i matematicky správná, jelikož nám příklad vyšel celých možných padesát procent.

Zajímavé může být i to, že již z Měsíce vidíme přibližně 49 % povrchu celé Země a to je jen o procento méně, než vidíme z nekonečné vzdálenosti.

Povšimněme si, že pokud letíme dopravním letadlem, vidíme pouze asi 6 setin procenta povrchu Země. Přesto se nám může zdát, jako bychom viděli podstatně velkou část zeměkoule.

4 Závěr

V rámci této práce byly vytvořeny texty doplněné ilustracemi, které mohou přiblížit aspoň částečně problematiku eukleidovského a neeukleidovského prostoru středoškolákům. Texty obsahují použité metody a matematické postupy, které mají vysvětlit matematický aparát, kterým je možné řešit uvedené problémy vztahující se k neeukleidovskému prostoru. Problémů, které byly formulovány ve spolupráci s konzultantem, je uvedeno v textu celkem osm a obecně se týkají situací na povrchu Země. K problémům byly také vytvořeny ilustrační obrázky.

Hlavním cílem bylo vyzkoušet si na úrovni pokročilé středoškolské matematiky a fyziky, jak se při řešení vědeckých prací podobného typu postupuje. Během práce jsem se dále naučil, jak nad vzniklými matematickými problémy přemýšlet a také jak používat některé pro mě dříve neznámé matematické funkce. Také jsem se naučil, jak by se měla takováto práce následně sepsat, do závěrečné kompaktní podoby, s čímž souvisejí různé zvyklosti, ohledně stylu psaní textu, ve kterém se vyskytují matematické vztahy. Jednou z nových věcí, se kterými jsem se setkal během práce, pro mě bylo, jak správně citovat literaturu, na kterou jsou odkazy ve vytvořeném textu.

Dalším cílem bylo vytvoření textů k vybraným problémům z neeukleidovské geometrie. Vytvořil jsem texty k celkem osmi problémům neeukleidovské geometrie vztahujících se k povrchu Země. K textům jsem dále vytvořil ilustrační obrázky pro lepší pochopení problémů.

Tato práce bude k dispozici studentům gymnázia Přírodní škola, může jim pomoci seznámit se s některými myšlenkami eukleidovské a neeukleidovské geometrie a mohla by některého ze studentů inspirovat pro jeho praktickou maturitu, nebo v lepším případě obecně přivést k zájmu o matematiku. Na základě vytvořených textů proběhne v některém z ročníků Přírodní školy lektorská praxe, která by měla studentům nastínit některé zajímavé problémy spojené s neeukleidovským prostorem.

5 Použitá literatura

[1] M. Mareš: *Příběhy matematiky*. Pistorius & Olšanská, Příbram 2011.

[2] Matematicko – fyzikální fakulta Univerzity Karlovy. [online]. [cit. 2012-11-01]. Dostupné z: http://mks.mff.cuni.cz/archive/archive.php

[3] K. Rektorys: *Přehled užité matematiky I*. Prometheus, Praha 2003.

[4] Google maps. [online]. [cit. 2012-11-01]. Dostupné z: https://maps.google.cz/maps?hl=cs&q=averrage

[5] Wolfram Alpha. [online]. [cit. 2012-11-01]. Dostupné z: http://www.wolframalpha.com/input/?i=radius+of+the+earth

[6] Letiště Znojmo. [online]. [cit. 2012-11-01]. Dostupné z: http://www.lkzn.cz/teorie/meteorologie/tlakTeplotaVyskomer2.htm